Le problème qui déchire
Analyse mathématique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.
Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?
Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ?...
Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ?
Et si je voulais atteindre 2017 ? 2018 ?

1.1 Deuxième partie

Maintenant, je choisis de couper ma feuille en deux ou en trois parties. Est-ce que je peux atteindre 2016 ? De combien de façons différentes ?
Et si je coupe en trois ou quatre parties ? En six ou huit parties ?... Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 (2017,2018,...) morceaux de papier ? Si oui, pourquoi et si non, quand est-ce que je ne peux pas ?

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

2.1 Première partie

Si je considère la découpe en n morceaux, j'obtiens la suite de morceaux de papier :

$$1 \to n \to 2n-1 \to 3n-2 \to \dots$$

c'est à dire la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $n-1$. 2016 sera atteint s'il est congru à 1 modulo $n-1$:

n	Atteint ?	mod(2016,$n-1$)
2	Oui	1
3	Non	0
4	Non	0
5	Non	0
6	Oui	1
...		

Ainsi pour 6 découpes, on obtient :
$1 \to 6 \to 11 \to \dots \to 2001 \to 2006 \to 2011 \to 2016$
Plus généralement, 2016 sera atteint pour toute découpe n si et seulement si $1+(n-1)k = 2016$ si et seulement si $mk = 2015$ avec $m = n-1$.
Donc m nécessairement un diviseur de 2015 et $2015 = 5 \times 13 \times 31$. Les diviseurs de 2015 sont donc :$\{1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015\}$ et donc les valeurs de n qui permettent d'atteindre 2016 sont :

$$\{2, 6, 14, 66, 156, 404, 2016\}$$

D'une façon encore plus générale, un nombre p sera atteint par des découpes en n si et seulement si $n-1$ est un diviseur de $p-1$.
Ainsi, 2017 sera atteint pour des découpes n avec $n-1$ diviseur de 2016, c'est à dire :

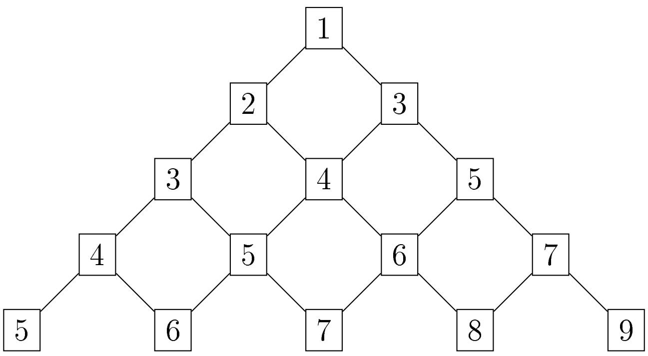
$$n \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 22, 25, 29, 33, 37, 43, 49, 57, 64, 73, 85, 97, 113, 127, 145, 169, 225, 253, 289, 337, 505, 673, 1009, 2017\}$$

Mais 2018, dont le prédécesseur 2017 est premier, ne sera atteint que par 2 et 2018 !

2.2 Deuxième partie

2.2.1 Introduction

Je sais qu'avec 2 découpes j'atteindrai tous les nombres strictement positifs, donc 2016 et que avec 3 découpes, je ne peux pas atteindre 2016. Si je choisis de ne pas toujours découper en 2, mais au moins une fois de découper en 3, est-ce que je pourrais atteindre 2016 ?
En découpant en 2, à partir d'une certaine valeur n j'obtiens $n+1$ morceaux. En découpant en trois, à partir d'une valeur n j'obtiens $n+2$ morceaux. Je peux représenter le nombre de morceaux de la manière suivante :



On voit ainsi que 3 apparaît deux fois, 5 apparaît trois fois, et on peut supposer que 7 apparaîtra quatre fois.... Et 2016, combien de fois apparaîtra-t-il ?
Sur le côté droit apparaissent les nombres impairs. Quand un nombre est apparu pour la première fois en ligne k il réapparaîtra les k lignes suivantes puis disparaîtra par la gauche. 2016 apparaîtra lorsque la ligne se terminera par 2017 soit sur la 1009$^{\text{eme}}$ ligne. 2017 apparaît à gauche sur la ligne 2017. 2017-1009+1=1009 ; donc 2017 apparaît 1009 fois et 2016, 1008 fois.
En fait, 2016 apparaîtra dans le tableau autant de fois que l'équation $x+2y=2016$ aura des solutions entières positives.

2.2.2 Résolution de l'équation $ax+by=c$

Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$ax+by=c \tag{1}$$

Supposons $a \wedge b = 1$, d'après le théorème de Bezout, il existe un unique couple (u, v) tel que $au+bv=1$. Si (x, y) est une solution de l'équation, alors $ax+by=1$, donc $a(x-u)+b(y-v)=0$, soit :

$$a(x-u) = b(v-y) \tag{2}$$

D'après le théorème de Gauss et comme $a \wedge b = 1$, b divise $x - u$ et a divise $v - y$. Donc

$$x - u = k_1 b \Leftrightarrow x = k_1 b + u \tag{3}$$
$$v - y = k_2 a \Leftrightarrow y = -k_2 a + v \tag{4}$$

En reportant x et y dans l'équation, il vient :

$$ak_1 b + au - bk_2 a + bv = 1 \tag{5}$$

Et, comme $au + bv = 1$, on en déduit $k_1 = k_2$.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = 1$ est :

$$S = \{(u + kb, v - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

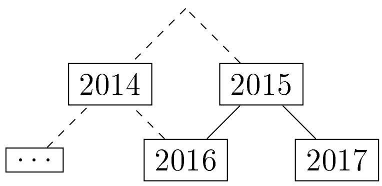
Et l'équation (1) :

$$S = \{(uc + kb, vc - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi, l'équation $x + 2y + 1 = 2016$ ou $x + 2y = 2015$ aura comme ensemble de solutions :

$$S_{1,2} = \{(-2015 + 2k, 2015 - k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

Parmi toutes les solutions, $-2015 + 2k \geq 0$ et $2015 - k \geq 0$, soit $1008 \leq k \leq 2015$, soit 1009 solutions. Par exemple, avec $k = 1008$, (1,1007) et effectivement, $1 \times 1 + 2 \times 1007 = 2015$, ce qui veut dire que si on coupe la feuille une fois en deux, puis 1007 fois en trois on obtient 2016 morceaux. Ce qui correspond à la solution qui dans le tableau apparaîtra juste avant 2017 :



Si $a \wedge b = d > 1$

Si c est divisible par d, l'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \tag{6}$$

avec $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$ premiers entre eux ; on obtient alors :

$$S = \left\{(u\frac{c}{d} + kb', v\frac{c}{d} - ka') \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Si c n'est pas divisible par d ; l'équation (1) n'a pas de solution !

2.2.3 Retour à l'analyse

Imaginons donc maintenant que l'on puisse découper en p et q morceaux et que l'on veuille atteindre n. L'équation que l'on aura à résoudre serait :

$$(p - 1)x + (q - 1)y + 1 = n \tag{7}$$

Soit encore :

$$(p - 1)x + (q - 1)y = n - 1 \tag{8}$$

Par exemple, si on découpe en 3 ou 4 parties, et que l'on cherche à atteindre 2016 l'équation à résoudre est :

$$2x + 3y = 2015 \tag{9}$$

dont les solutions sont :

$$S_{2,3} = \{(-2015 + 3k, 2015 - 2k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

avec $672 \leq k \leq 1007$; soit 336 solutions, par exemple avec $k = 1000$, en coupant 985 fois en 3 parties et 15 fois en 4, on obtient 2016 morceaux. En effet, en coupant 985 fois en 3 parties, on obtient $985 \times 2 + 1 = 1971$ morceaux. Puis, en coupant 15 fois en 4 à partir des 1971 morceaux, on obtient $1971 + 15 \times 3 = 2016$ morceaux.
Si on coupe en 6 ou 8 morceaux, l'équation à résoudre est :

$$5x + 7y = 2015 \tag{10}$$

et on trouve des solutions ; en revanche, en coupant en 7 morceaux et 9 morceaux, on obtient l'équation

$$6x + 8y = 2015 \tag{11}$$

qui n'a pas de solutions !
D'une façon plus générale si on veut découper en p et q morceaux, on pourra atteindre tous les nombres si $p - 1 \wedge q - 1 = 1$.
Si $p-1 \wedge q-1 = d$, l'équation $px+qy = n-1$ a des solutions (c'est à dire, les nombres atteints) si et seulement si d divise $n - 1$. Par exemple, $p = 7$, $q = 9$, $p - 1 \wedge q - 1 = 2$.
Dans tous les cas (en notant $p < q$), on peut représenter la situation par le schéma ci-dessous. On remarque en particulier que la différence entre les termes consécutifs d'une même ligne vaut $q - p$: