Le billard
Analyse didactique

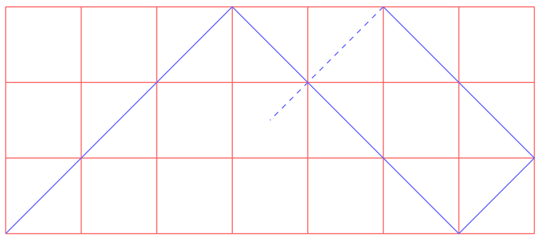
Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

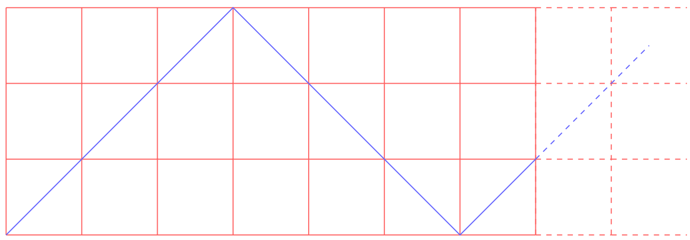
On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).
Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.
Un exemple :



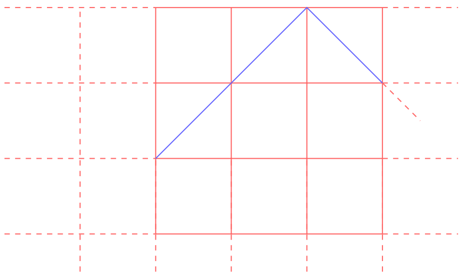
Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?

2 Variables de la situation

Dans l'énoncé, un dessin est-il présent ou non ? C'est une variable importante, puisque le dessin est *a priori* un lieu d'expérimentation. Sa présence peut être considérée comme une aide pour l'interprétation des termes « quadrillé de façon régulière », « rebondir » mais aussi comme un enfermement à regarder que ce dessin sans penser à multiplier les expériences.
On peut, par exemple utiliser un dessin comme ci-dessous :



Ou encore, pour expliciter juste le type de rebond que l'on considère dans le problème :



Une autre possibilité est de donner *a priori* des grilles de différentes dimensions, en veillant bien à ce que l'une au moins ait des longueurs dont les mesures ne sont pas des nombres premiers entre eux. En effet, souvent, les premières expériences utilisent des petits nombres (grilles 2×3, 4×5 etc.) et la conjecture (fausse) du produit des deux longueurs apparaît.
Ainsi, en donnant, ou ne donnant pas le dessin (ou les dessins), on modifie notoirement la résolution du problème. On peut, par exemple, vouloir que les élèves se heurtent à la difficulté des exemples de nombres premiers entre eux, et qu'ils construisent leur raisonnement sur cette première idée ou au contraire éviter cette conjecture en proposant d'emblée un contre-exemple.

3 Connaissances et capacités en jeu

En ce qui concerne les connaissances mathématiques nécessaires, la liste est succincte :

- multiple d'un nombre,
- diviseur d'un nombre,
- plus grand diviseur commun de deux nombres,
- plus petit multiple commun de deux nombres,
- décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers,
- nombres premiers, nombres premiers entre eux,
- algorithmes de détermination du pgcd (soustraction, Euclide).

En revanche en termes de compétences, l'idée de faire des expériences, d'interpréter les résultats obtenus, de les remettre en cause avec d'autres expériences, de convoquer des connaissances arithmétiques dans un problème géométrique est déjà d'un assez haut niveau. Ce problème est ainsi très intéressant pour développer et institutionnaliser ce type de compétences liées à la grande compétence « chercher ».

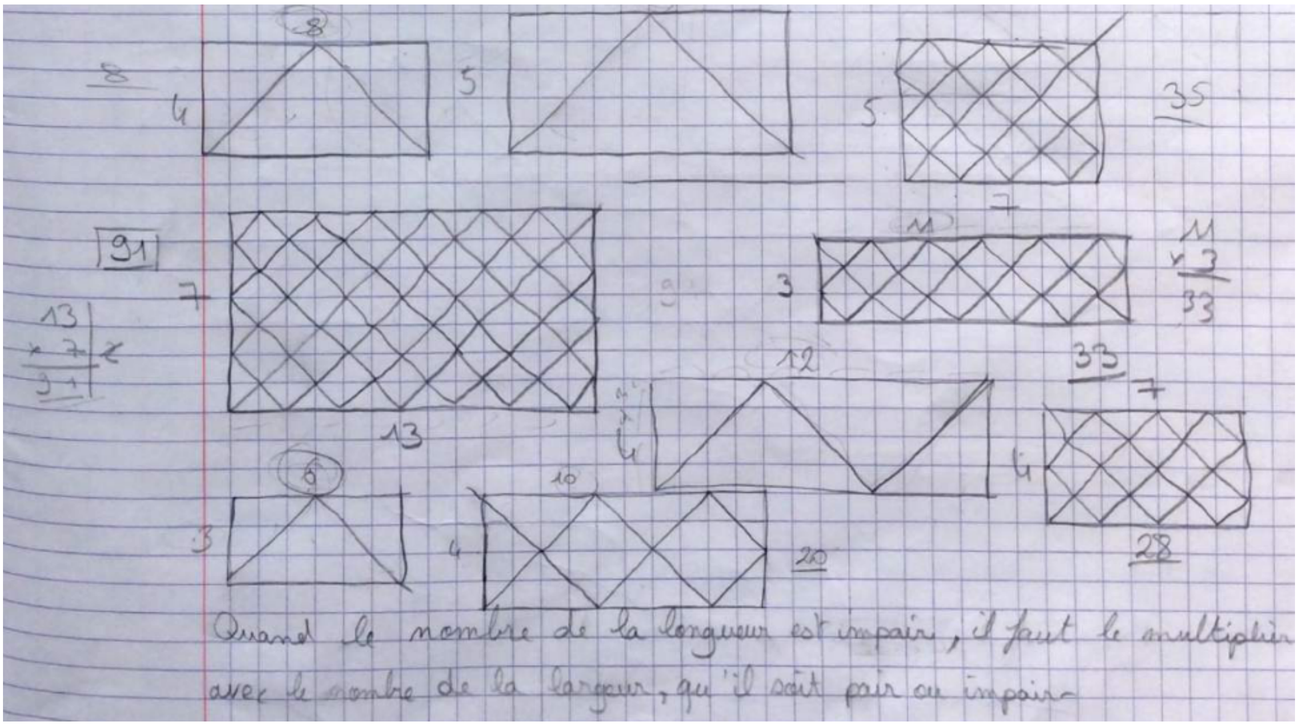


Figure 1: Un extrait des recherches d'un élève de 3eme

Une fois le résultat acquis, la démonstration pose également un certain nombre de problèmes parce qu'elle est assez loin d'une démonstration type : « je sais que…, or…, donc… ». Voir à ce propos les propositions dans l'analyse mathématique.

4 Procédure(s) élèves

Les procédures élèves reposent essentiellement sur des expériences (voir par exemple la figure 1). L'enseignant doit donc être vigilant pour bien distinguer les résultats issus d'expériences et ceux provenant d'une interprétation des résultats d'expériences. Cette vigilance doit amener à mettre en évidence les méthodes et les distinguer des résultats obtenus. Comme souvent dans les Situations Didactiques de Recherche de Problèmes, les élèves peuvent être imaginatifs et la mise en commun et l'institutionnalisation doit pouvoir être construites sur ce que les élèves auront fait. Voir, à ce propos, la mise en œuvre de ce problème.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

La question de savoir si la lumière sortira toujours du billard peut être une difficulté à laquelle se heurtent les élèves. En effet, répondre à cette question revient à résoudre le problème.
La confusion peut également apparaître entre nombres premiers entre eux et nombres impairs. En effet, des *petits* nombres impairs, sont premiers entre eux (3,5), (3,7), (3,11), (3, 13), (5,7), (5,9), (5,11), (5,13),…Seuls ici (3,9) est un contre-exemple (à garder en tête !)
Une autre difficulté prévisible est d'invoquer des propriétés des nombres sur un problème *a priori* géométrique. Des élèves peuvent rester dans le cadre géométrique et chercher à convoquer des propriétés issues des cours de géométrie. Mais c'est aussi un des intérêts de ce problème !
Enfin, une difficulté rencontrée est liée aux notions de multiples et diviseurs, en particulier pour distinguer ces deux notions ; c'est aussi une opportunité pour donner du sens à ces concepts.