Les pavages archmédiens du plan
Analyse Mathématique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

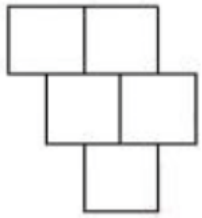
Table des matières

1 L'énoncé du problème

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

2.1 Rappel du cadre

Définition : Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers satisfaisant aux conditions suivantes :
- si deux polygones du recouvrement ont un point commun unique, il est sommet de l'un et de l'autre (un tel point sera dit un nœud du pavage) ;
- si deux polygones du recouvrement ont plus d'un point commun, leur intersection est un côté de l'un et de l'autre ;
- la configuration locale en chaque nœud est la même à une symétrie près : si par exemple, en tournant autour du nœud N dans le sens direct, on trouve successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone, on trouvera aussi successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone en tournant autour de tout autre nœud soit dans le sens direct soit dans le sens rétrograde.

Un peu de vocabulaire
- le type d'un nœud est la liste des nombres de côtés des polygones l'ayant pour sommet, énumérés en tournant autour de ce nœud dans le sens direct ou dans le sens rétrograde. Ainsi le nœud N dont nous parlions précédemment est de type (m,n,p,q), mais il est aussi de type (n,p,q,m) ou (q,p,n,m) ; en revanche, si m,n,p,q sont distincts, il n'est pas de type (m,n,q,p).
- l'ordre d'un nœud est le nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet. Ainsi le nœud N décrit ci-dessus est d'ordre 4.
Pour un pavage archimédien donné, tous les nœuds ont même ordre et même type, qui sont dits ordre et type du pavage. En outre, les côtés des polygones le composant ont tous même longueur.

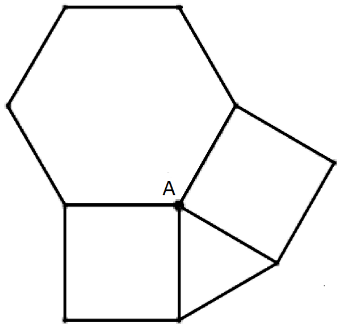


Figure 1: Exemple de nœud d'ordre 4, de type (6,4,3,4)

2.2 Remarques préliminaires

Relation entre l'ordre et le type

Si n_i est le nombre de côtés du polygone régulier P_i , ses angles valent $\alpha_i = (1 - \frac{2}{n_i})\pi$. Autour d'un nœud de type $(n_1, n_2, ..., n_k)$, on a

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi$$

On en tire aussitôt la relation (R) :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

Valeurs de l'ordre possibles a priori
On ne peut assembler autour d'un nœud moins de 3 et plus de 6 polygones réguliers. Le premier résultat est évident. Le second découle, avec les notations du paragraphe précédent, de ce que la plus petite valeur possible de α_i est $\frac{\pi}{3}$, donc que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq k\frac{\pi}{3}.$$

Disjonction de cas Il nous faut donc commencer par chercher à assembler autour d'un point 3, 4, 5 ou 6 polygones réguliers ... étant entendu qu'un tel assemblage **ne pourra pas forcément être prolongé** en un pavage archimédien du plan tout entier (car n'oublions pas de respecter la contrainte d'avoir en chaque nœud la même configuration).

2.3 Pavage d'ordre 6

Un pavage d'ordre 6 suppose que tous les α_i valent $\frac{\pi}{3}$; c'est le classique pavage régulier par triangles équilatéraux.

2.4 Pavage d'ordre 3

Avec les notations précédentes, la relation (R) nous donne $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$. Il faudra donc décomposer $\frac{1}{2}$ en somme de trois fractions de numérateur 1, mais une telle décomposition ne fournit pas toujours un pavage, comme le montrent les deux remarques ci-après, qui permettront de limiter le travail.

Lemme 1
Dans un pavage archimédien d'ordre 3, de type (x,y,z), si z est impair, alors x = y.

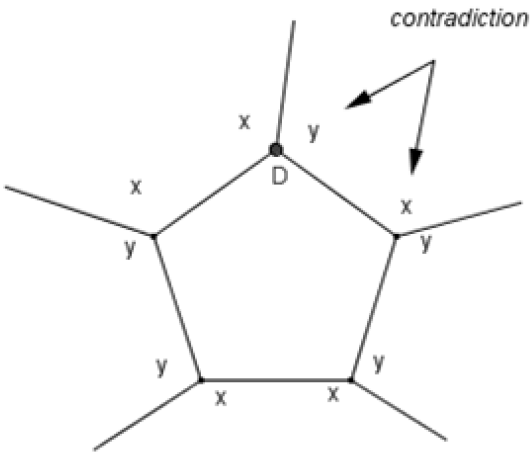


Figure 2: Autour de P_i, i impair

Supposons d'abord x, y, z tous distincts et observons ce qui se passe quand on décrit dans le sens direct le pourtour d'un z-gone en partant d'un point D (Figure 2). Le premier côté longe un x-gone, le second un y-gone, le troisième un x-gone, etc. Quand on arrive au dernier, on obtient, puisque le nombre z de côtés est impair, un x-gone alors que ce devrait être un y-gone compte tenu du type de D. Supposons maintenant que l'on ait $x = z$ et z $\neq y$. Le même travail permet de conclure à une contradiction : si l'on décrit dans le sens direct le pourtour d'un z-gone en partant d'un point D, les côtés de ce z-gone longent alternativement un z-gone et un y-gone, ce qui exigerait que le nombre de côtés du z-gone décrit soit pair.

Lemme 2
Dans un pavage archimédien d'ordre 3, de type (x, y, z), si z est impair, alors $z = 3$.
Nous savons par le lemme 1 que $x = y$. On a donc $\frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire $y(z-2) = 4z$. Comme z est impair, $z - 2$ est impair ; mais il divise $4z$, donc il divise z et par suite aussi $z - (z-2) = 2$, donc il vaut 1.

Étude du cas $z = 3$

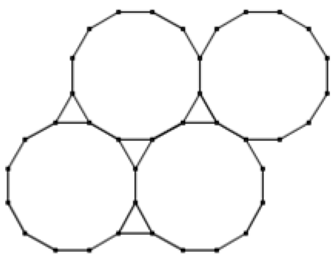


Figure 3: Pavage de type (3,12,12)

Des calculs que nous venons de faire on déduit aussitôt que $y = 12$ et donc que le pavage, s'il existe, est du type $(12, 12, 3)$. La figure (3) montre qu'un tel pavage existe ; il est unique à une similitude directe près, car une fois choisis un dodécagone de base et l'un des côtés sur lequel on bâtit un triangle équilatéral, la totalité de la construction est déterminée.

Cas où x, y, z sont tous pairs
On peut toujours supposer $x \leq y \leq z$. De $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, on tire $\frac{3}{x} \geq \frac{1}{2}$, donc $x \leq 6$, donc $x = 6$ ou $x = 4$.
Le premier cas impose $x = y = z = 6$ et correspond au classique pavage du plan par des hexagones réguliers. Le second cas donne $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$; cela exige que y et z soient strictement supérieurs à 4, donc au moins égaux à 6. Mais, puisque $y \leq z$, on a $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{4}$, donc y vaut 6 ou 8. Finalement, on aboutit à (4, 6, 12) et (4, 8, 8).

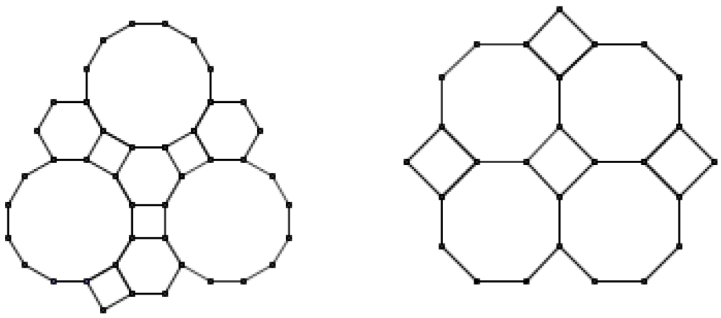


FIGURE 4: Pavages (4,6,12) et (4,8,8)

Les figures ci-dessus montrent que de tels pavages existent. Pour la même raison que précédemment, ils sont uniques à une similitude directe près : dans le premier cas, une fois choisis un dodécagone de base et l'un des côtés contre lequel on posera un carré, la totalité de la construction est déterminée ; dans le second cas, une fois placé un carré de base, la construction s'ensuit.

2.5 Pavage d'ordre 4

Soit un pavage d'ordre 4 et de type (x, y, z, t) . On classe ces quatre nombres dans l'ordre croissant : (n_1, n_2, n_3, n_4) . la relation (R) établie au début s'écrit ici

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1.$$

On en tire $\frac{4}{n_1} \geq 1$, ce qui permet d'affirmer que n_1 vaut 3 ou 4.
Si $n_1 = 4$, les quatre fractions $\frac{1}{n_i}$ sont au plus égales à $\frac{1}{4}$; leur somme ne peut valoir 1 que si chaque n_i vaut 4. Le type est donc (4, 4, 4, 4) : c'est le pavage régulier par des carrés.
Nous supposons désormais $n_1 = 3$. On a alors

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3},$$

les n_i étant toujours supposés rangés par ordre croissant, ce qui assure l'inégalité $\frac{3}{n_2} \geq \frac{2}{3}$; donc n_2 vaut 3 ou 4.

Si $n_2 = 3$, on a

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3},$$

donc $n_3 > 3$. De plus $\frac{2}{n_3} \geq \frac{1}{3}$ donne $n_3 \leq 6$. On a donc à essayer pour n_3 les valeurs 4, 5 et 6. On trouve immédiatement $n_3 = 4, n_4 = 12$ et $n_3 = 6, n_4 = 6$.
Si $n_2 = 4$, on a

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12},$$

d'où l'on tire $\frac{2}{n_3} \geq \frac{5}{12}$, soit $n_3 \leq \frac{24}{5}$, donc $n_3 \leq 4$, ce qui prouve puisque $n_3 \geq n_2$, que $n_3 = 4$. Il vient alors $n_4 = 6$.
Nous avons, comme liste de valeurs *a priori* possibles, classées dans l'ordre croissant, (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6) et (3, 4, 4, 6). Il nous faut donc examiner la liste de types suivante : (3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 4, 6) et (3, 4, 6, 4). (L)
Tout autre type *a priori* envisageable se ramène à l'un de ces six. Ainsi, par exemple (4, 3, 3, 12) définit par symétrie le même type que (12, 3, 3, 4), qui par permutation circulaire se ramène à (3, 3, 4, 12).
Un lemme va nous permettre de montrer que quatre de ces six types ne permettent pas de définir un pavage archimédien.

Lemme 3
Il n'existe pas de pavage archimédien de type (3,x,y,z) avec $x \neq z$.
La démonstration est voisine de celle du lemme 1. Observons ce qui se passe aux sommets d'un triangle équilatéral ABC du pavage en partant du point A.

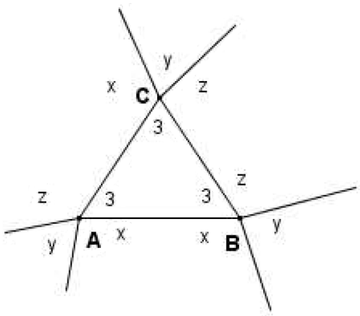


FIGURE 5: Autour d'un triangle

Premier cas : x et z différents de 3
Supposons, ce qui n'est pas restrictif, que le côté AB du triangle ABC longe un x-gone. Alors, compte tenu du type du nœud B (et que y soit ou non égal à 3), le côté BC longe un z-gone. Puis, compte tenu du type du nœud C, le côté CA longe un x-gone. On voit alors que le nœud A est du type $(3, x, y, z)$ et donc que $x = z$.
Second cas : $x = 3$ ou $z = 3$
Supposons par exemple $x = 3$. Dans la liste (L) ci-dessus aucun des types *a priori* possibles ne présente trois fois le nombre 3. Il nous faut donc étudier la possibilité du type $(3, 3, x, z)$, avec y et z différents de 3.
Pour un nœud de ce type, la juxtaposition des deux « 3 » signifie que ce point est sommet de deux triangles équilatéraux ayant un côté commun. Il y a donc dans le pavage un triangle équilatéral ABC tel que le côté $[AB]$ longe un autre triangle équilatéral. étant donné le type

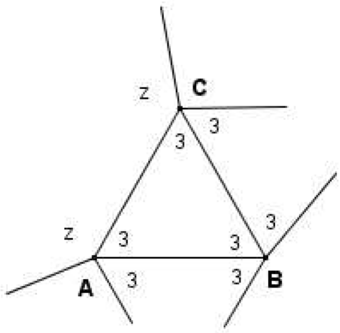


Figure 6: Autour d'un triangle (2)

du nœud C, l'un des deux côtés $[BC]$ et $[AC]$, mettons $[BC]$, est longé par le triangle ABC et un autre triangle équilatéral. Mais alors le nœud B est de type (3, 3, 3, ...), ce qui est exclu.
Pavages exclus par le lemme 3
Voyons la liste (L) des cas *a priori* possibles :
(3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 4, 6), (3, 4, 6, 4).
Les types (3, 4, 3, 12), (3, 4, 4, 6), (3, 3, 4, 12) et (3, 3, 6, 6) sont exclus par le lemme 3 comme étant du type $(3, x, y, z)$ avec $x \neq z$.
Restent à étudier les deux cas (3, 4, 6, 4) et (3, 6, 3, 6).
Les figures ci-après montrent que de tels pavages existent. Ils sont uniques à une similitude directe près pour la même raison que dans les cas précédents : une fois choisi un hexagone de base, la totalité de la construction est déterminée.

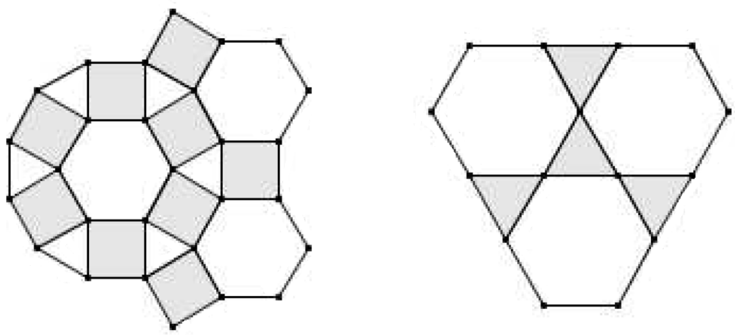


Figure 7: (3,4,6,4) et (3,6,3,6)

2.6 Pavage d'ordre 5

Soit un pavage d'ordre 5 et de type (x, y, z, t, u) . On classe ces quatre nombres dans l'ordre croissant : $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$. La relation (R) établie au début s'écrit ici

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}.$$

Les trois premiers n_i sont égaux à 3, car s'il n'en était pas ainsi on aurait

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4};$$

or le second membre vaut $\frac{17}{12}$, inférieur à $\frac{3}{2}$. Il reste donc à discuter $\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}$, avec n_4 et n_5 au moins égaux à 3. On voit aussitôt que les seules solutions sont (3,6) et (4,4).
Les types *a priori* possibles sont donc (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4) et (3,3,4,3,4). Les figures ci-dessous montrent que de tels pavages existent.

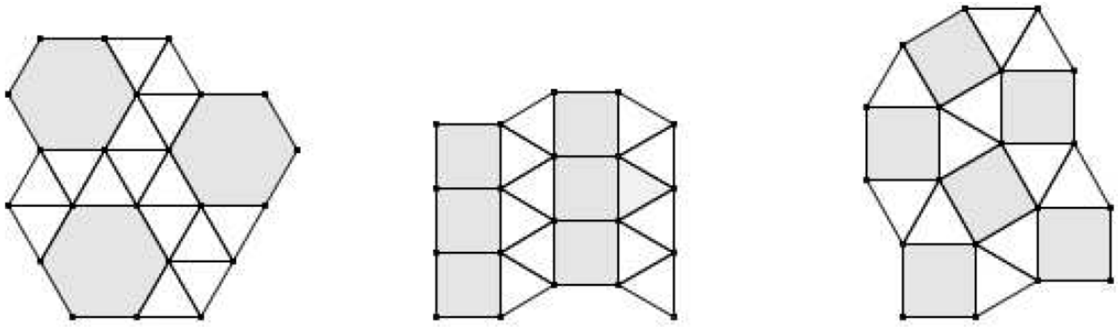


Figure 8: (3,3,3,3,6),(3,3,3,4,4) et (3,3,4,3,4)

Le pavage (3,3,3,4,4) est manifestement unique à une similitude directe près. Il en est de même pour le pavage (3,3,4,3,4), mais la démonstration est un peu plus laborieuse ; on peut cependant faire constater que, si l'on choisit comme point de départ deux triangles équilatéraux accolés, on a carte forcée pour l'ensemble de la construction.
En revanche, à partir d'un hexagone régulier donné, on peut construire deux pavages (3,3,3,3,6) se correspondant par symétrie, mais non superposables par déplacement. Si on construit autour de l'hexagone sa couronne de dix-huit triangles équilatéraux, on voit en effet que l'on a deux faç ons de placer les hexagones suivants. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les deux solutions sont superposables par symétrie, mais non par déplacement. Pour le type (3,3,3,3,6) et lui seul, l'unicité est donc à une similitude directe ou inverse près.

2.7 Conclusion

D'après les recherches précédentes, voici le résumé des pavages archimédiens du plan :

Ordre 3	**Ordre 4**	**Ordre 5**	**Ordre 6**
(6,6,6)	(4,4,4,4)	(3,3,3,3,6)	(3,3,3,3,3,3)
(3, 12, 12)	(3,6,3,6)	(3,3,3,4,4)	
(4, 6, 12)	(3,4,6,4)	(3,3,4,3,4)	
(4, 8, 8)			