

Les nombres trapézoïdaux  
*Ouverture mathématique, prolongement didactique*

Équipe DREAM

12 juillet 2020

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Énoncé du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Ouvertures mathématiques</b>	<b>2</b>
2.1	Quelques remarques sur le tableau 1 . . . . .	2
2.2	Et si les nombres pouvaient être négatifs ? . . . . .	3
2.3	Quelques éléments concernant les nombres triangulaires . . . . .	4
2.4	Une généralisation des nombres trapézoïdaux . . . . .	5
2.5	Et pourquoi ne pas s'intéresser aux nombres 3-trapézoïdaux ? . . . . .	8
2.6	D'une manière générale . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Prolongements didactiques</b>	<b>12</b>

# 1 Énoncé du problème

Quels sont les nombres entiers positifs  $n > 0$  tels que

$$\exists p \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{N} \wedge q > p \text{ tel que } n = \sum_{i=p}^q i$$

## 2 Ouvertures mathématiques

L'analyse mathématique du problème montre que les nombres trapézoïdaux sont tous les nombres sauf les puissances de 2. Un nombre trapézoïdal est donc un nombre  $T$  de la forme :

$$T(a, b) = \frac{(2a - 1 + b)b}{2} \text{ où } a \text{ est le point de départ et } b \text{ le nombre de termes}$$

b \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
5	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	21	27	33	39	45	51	57	63	69	72
7	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91
8	36	44	52	60	68	72	80	88	96	104
9	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126
10	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145

TABLE 1: Quelques nombres trapézoïdaux  $T(a, b)$

### 2.1 Quelques remarques sur le tableau 1

$T(a - k, 2k)$  tant que  $a - k \geq 1$  est un multiple de  $T(a, 2)$

Preuve

Autrement dit, dans un tableau, le chemin du cavalier saute d'un nombre à un de ses multiples en partant de la première ligne (voir par exemple les nombres en rouge dans le tableau).

$$T(a - k, 2k) = \frac{(2a - 2k - 1 + 2k)2k}{2} = k(2a - 1) = kT(a, 2)$$

Par ailleurs sur une même ligne du tableau tous les nombres sont multiples d'un même nombre :

$$\forall a \forall b \exists k \exists h T(a, b) = kh$$

En effet, si  $b$  est pair  $T(a, b) = (2a - 1 + b) \times \frac{b}{2}$  et si  $b$  est impair  $T(a, b) = \frac{2a-1+b}{2} \times b$ .

## 2.2 Et si les nombres pouvaient être négatifs ?

On pourrait aussi de se demander si dans un ensemble plus grand les puissances de 2 pourraient aussi être atteintes ; l'idée de se placer alors dans  $\mathbb{Z}$  que l'on peut trouver en construisant une somme à partir d'un nombre pair ayant au moins un facteur impair, devient naturelle. Ainsi

$$2 = -1 + 0 + 1 + 2$$

et d'une façon générale

$$2^n = (-2^n + 1) + (-2^n + 2) + \dots + (2^n - 1) + 2^n$$

Dans ce cas, la décomposition est unique et la question de savoir le nombre de décompositions des autres nombres peut se poser.

Les remarques précédentes nous ont montré que les nombres sont tous des multiples d'un même nombre. Réciproquement pour trouver une somme, on peut partir des diviseurs de ce nombre ainsi que des doubles de ces diviseurs.

Par exemple  $2018 = 2 \times 1009$  : il y a donc l'ensemble des diviseurs et de leurs doubles :  $\{1, 2, 4, 1009, 2018, 4036\}$  qui donnent les sommes :

Si  $b$  est pair on a :  $2n = b(2a + b - 1)$   $6 \text{ div } 1, 2, 3, 6, 12$   $6 = 0 + 1 + 2 + 3 = -5 + -4 + -3 + -2 + -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$b$  impair  $b = 1$   $12 = 2a$   $a = 6$

$b = 3$   $12 = 3x(2a + 2)$   $a = 1$   $1 + 2 + 3$   $b$  pair  $b = 2$   $6 = 2^*(2a + 1)/2$   $b = 4$   $6 = 2(2a + 3)$   $a = 0$

\*  $b = 2$   $2018 = \frac{2}{2} \times (2a - 1 + 2) = 2a + 1$  qui n'a pas de solution.

\*  $b = 4$   $2018 = \frac{4}{2} \times (2a - 1 + 4)$  et  $a = 503$  :  $2018 = 503 + 504 + 505 + 506$

\*  $b = 2018$  n'a pas de solution

\*  $b = 4036$   $2018 = 2018(2a + 4035)$  et  $a = -2017$ . Donc  $2018 = -2017 = -2016 + \dots + 2017 + 2018$

Si  $b$  est impair

\*  $b = 1$   $2a + 2017 = 4036$  qui n'a pas de solution

\*  $b = 1009$   $1009(a + 504) = 2018$  et donc  $a = -522$  et finalement  $2018 = -502 + -501 + \dots + 505 + 506$

Finalement 2018 peut être atteint par 3 sommes différentes ce qui correspond à deux fois le nombre de diviseurs impairs moins 1.

Si maintenant on cherche pour une puissance de 2, par exemple 2048 :

Si 2048 se décompose en une somme de  $k$  entiers consécutifs alors :

$$2048 = \frac{b}{2} \times (2a + b - 1) \quad (1)$$

• **Cas 1** :  $b$  impair

$b$  divise 2048 d'après (1) donc  $b = 1$  qui est le seul diviseur impair de 2048 et alors on a  $a = 2048$ , c'est la décomposition triviale que l'on exclut.

• **Cas 2** :  $b$  pair

$b$  vérifie (1) donc  $b(2a + b - 1) = 2048 \times 2 = 2^{12}$ . Comme  $b$  est pair,  $2a + b - 1$  est impair. Le seul diviseur impair de 2048 est 1 donc on doit avoir  $2b + a - 1 = 1$  et  $b = 2 \times 2048$ . Donc il faut que  $n = \frac{2 - 2 \times 2048}{2} = -2047$ . On retrouve la décomposition  $-2047 + \dots + 2048 = 2048$ .

**Théorème 1.** Si  $n$  est un entier strictement positif et si  $\Phi(n)$  est le nombre de diviseurs impairs de  $n$  alors le nombre de décomposition en somme d'entiers consécutifs  $D(n)$  est égal à :

$$D(n) = 2 \times \Phi(n) - 1$$

Preuve

Soit  $n$  un entier.

**1<sup>er</sup> cas** :  $b$  impair.  $b$  doit et peut alors être n'importe quel diviseur impair de  $n$  ; puis on calcule  $\frac{n}{b} = \frac{a+(b-1)}{2}$  et enfin  $a$ .

**2<sup>nd</sup> cas** :  $b$  pair.  $2a + b - 1$  doit et peut alors être n'importe quel diviseur impair de  $n$  ; puis on calcule  $\frac{n}{2a+b-1} = \frac{b}{2}$  et donc  $b$  (pair) et enfin  $a$ .

La suite des résultats est répertoriée dans l'encyclopédie des suites d'entiers sous le numéro [A069283](#).

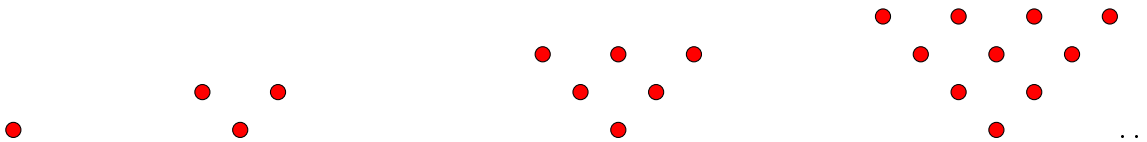
Cette suite est aussi les coefficients du développement de sa fonction génératrice :

$$f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1-x^k}$$

## 2.3 Quelques éléments concernant les nombres triangulaires

Ces nombres, largement exploités dans l'étude des nombres trapézoïdaux peuvent être étudiés pour leurs propres propriétés.

Outre le fait qu'ils peuvent être représentés comme une suite de triangles :



**Propriété 1.** Une propriété intéressante : si on appelle  $T_n$  le  $n^{\text{ième}}$  nombre triangulaire

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$$

La preuve est simplement calculatoire :

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2-n)(n+2+n)}{4} = (n+1)^3$$

**Propriété 2.** La somme de deux nombres triangulaires consécutifs est un nombre carré.

Preuve

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)^2$$

**Théorème 2.** La fonction génératrice des nombres triangulaires est la fonction  $f$  telle que :

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + \dots$$

Preuve

On commence par déterminer la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$ .

**Lemme :**

$$\forall n \geq 1 \quad f^{(n)}(x) = \frac{\frac{n(n+1)!}{2} + (n+1)! \times x}{(1-x)^{n+3}} \quad (2)$$

Si  $n = 1$  :

$$f'(x) = \frac{1 + 2x}{(1 - x)^4}$$

Démontrons alors que si pour tout  $n \geq 1$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{\frac{n(n+1)!}{2} + (n+1)! \times x}{(1-x)^{n+3}}$  alors  $f^{(n+1)}(x) = \frac{\frac{(n+1)(n+2)!}{2} + (n+2)! \times x}{(1-x)^{n+4}}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(n+1)!(1-x)^{n+3} + \left((n+1)!x + \frac{n(n+1)!}{2}\right)(n+3)(1-x)^{n+2}}{(1-x)^{2n+6}} \\ &= \frac{(n+1)!(1-x) + (n+3)\left((n+1)!x + \frac{n(n+1)!}{2}\right)}{(1-x)^{n+4}} \\ &= \frac{x(-(n+1)! + (n+3)(n+1)!) + (n+1)! + \frac{n(n+3)(n+1)!}{2}}{(1-x)^{n+4}} \\ &= \frac{x(n+1)!(n+2) + \frac{(n+1)!(n+1)(n+2)}{2}}{(1-x)^{n+4}} \\ &= \frac{x(n+2)! + \frac{(n+2)!(n+1)}{2}}{(1-x)^{n+4}} \end{aligned}$$

Le développement en série entière de  $f$  est donc :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1)}{2} x^i$$

Le rayon de convergence est 1.

**Propriété 3.**

$$\sum_{k=1}^n k^3 = T_n^2$$

On peut encore une fois donner une preuve par récurrence.

## 2.4 Une généralisation des nombres trapézoïdaux

**Définition 1.** On appelle nombre  $m$ -trapézoïdal un nombre somme de terme d'une suite arithmétique de raison  $r$ .  $T(d, r, n)$  est ainsi le nombre :

$$T(d, r, n) = \sum_{k=0}^{n-1} d + k \times r$$

Exemple :  $T(2, 3, 4) = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$  est un nombre 3-trapézoïdal, somme de 4 termes de la suite arithmétique de raison 3 de premier terme 2.

**Propriété 4.** Pour tout  $d, r$  et  $n$ ,

$$T(d, r, n) = n \frac{2d + r(n-1)}{2}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 T(d, r, n) &= \sum_{k=0}^{n-1} d + k \times r \\
 &= n \times d + r \sum_{k=0}^{n-1} k \\
 &= n \times d + r \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= n \frac{2d + r(n-1)}{2}
 \end{aligned}$$

**Propriété 5.** *Quelque soit  $r \geq 0$ , et quelque soit  $d \geq 2$  et  $n \geq 0$ ,  $T(d, r, n)$  peut être transformé en nombre rectangulaire c'est à dire de la forme  $p \times q$*

preuve

Si  $r = 2r'$  est pair, soit  $n \geq 0$  et  $d \geq 2$  alors

$$T(d, r, n) = n \times (d + (n-1)r')$$

Si  $r = 2r' + 1$  est impair, soit  $n \geq 0$  et  $d \geq 2$  alors

$$T(d, r, n) = n \frac{2d + 2nr' - 2r' + n - 1}{2} = n \times (d + r'(n-1)) + \frac{n(n-1)}{2}$$

Si  $n = 2n'$  est pair :

$$T(d, r, n) = 2n'd + 2n'r'(n-1) + n'(n-1) = n'(2d + (2r' + n')(n-1))$$

Si  $n = 2n' + 1$  est impair

$$T(d, r, n) = (2n' + 1)(d + 2n'r') + (2n' + 1)n' = (2n' + 1)(d + 2n'r' + n')$$

**Théorème 3.** *Quelque soit les entiers  $d \geq 2$ ,  $r \geq 1$  et  $n \geq 0$  alors quelque soit  $i \leq n$  :*

$$T(d, r, n) = T(d, i, n) + (r - i)Tri(n-1)$$

où  $Tri(n-1)$  est le nombre triangulaire jusqu'à  $n-1$

Preuve Soit :  $d \geq 2$ ,  $r \geq 1$  et  $n \geq 0$   $i \leq n$  :

$$\begin{aligned}
 T(d, i, n) + (r - i)Tri(n-1) &= n \frac{2d + i(n-1)}{2} + (r - i) \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= \frac{2dn + in(n-1) + (r - i)(n(n-1))}{2} \\
 &= \frac{2dn + rn(n-1)}{2} = T(d, r, n)
 \end{aligned}$$

Exemple :

$$T(2, 3, 4) = 26 = T(2, 2, 4) + (3 - 2)Tri(3) = 2 + 4 + 6 + 8 + \frac{3 \times 4}{2}$$

$$= T(2, 1, 4) + (3 - 1)Tri(3) = 2 + 3 + 4 + 5 + 2 \times 6$$

Si on donne à  $i$  la valeur 1, on revient aux nombres trapézoïdaux (de raison 1) et on a  $\forall r \geq 0$  :

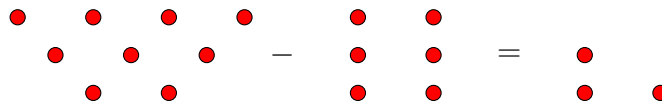
$$T(d, r, n) - T(d, n) = (r - 1)Tri(n - 1)$$

Si on donne à  $i$  la valeur 0, on revient aux nombres rectangulaires et on a :  $\forall r \geq 0$  :

$$T(d, r, n) - Rect(d, n) = rTri(n - 1)$$

et en particulier :

$$T(d, n) - Rect(d, n) = Tri(n - 1)$$



$$T(2, 3) - Rect(2, 3) = Tri(2)$$

**Théorème 4.** Si  $r$  est pair alors  $\forall d, r$   $T(d, r, n)$  est un nombre rectangulaire

Preuve

$$r = 2r'$$

$$T(d, r, n) = \frac{n(2d + 2r'(n - 1))}{2} = n(d + r'(n - 1))$$

et  $T(d, r, n)$  est un nombre rectangulaire de côté  $n$  et  $d + r'(n - 1)$ .

**Théorème 5.** Si  $N$  est un entier positif, alors  $N$  est un nombre 2-trapézoïdal si et seulement si  $N$  n'est pas premier.

Preuve Si  $N$  est 2-trapézoïdal alors c'est un nombre rectangle de côtés  $n$  et  $d + n - 1$  et il n'est donc pas premier.

Si  $N$  n'est pas premier alors c'est un nombre rectangle et  $N = ls$  avec  $1 < l \leq s < N$  ; si on pose :

$$n = l \text{ et } d = s - l + 1 \text{ alors :}$$

$$N = ls = n(d + n - 1) = n \frac{2d + 2(n - 1)}{2} = T(d, 2, n)$$

**Remarque :** la preuve donne une construction d'un nombre non premier en somme de termes d'une suite arithmétique de raison 2. Par exemple :

$$63 = 3^2 \times 7 = 3 \times 21$$

$$n = 7 \text{ et } d = 9 - 7 + 1 = 3 \text{ et } 63 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

$$n = 9 \text{ et } d = 7 - 9 + 1 = -1 \text{ et } 63 = -1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

$$n = 21 \text{ et } d = 3 - 21 + 1 = -17 \text{ et}$$

$$63 = (-17) + (-15) + (-13) + (-11) + (-9) + (-7) + (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 19 + 21 + 23$$

ou

$$n = 3 \text{ et } d = 21 - 3 + 1 \text{ et } 63 = 19 + 21 + 23.$$

**Théorème 6.** Soit  $N$  un nombre 2-trapézoïdal alors le nombre de décompositions de  $N$  en sommes de termes de suites arithmétiques de raison 2 est :

$$\frac{\tau(N) - 1}{2} \text{ si } N \text{ est un carré,}$$

$$\frac{\tau(N)}{2} - 1 \text{ sinon.}$$

où  $\tau(N)$  est le nombre de diviseurs de  $N$

**Remarque** Si  $N = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$  alors le nombre de diviseurs de  $N$  est  $\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i)$

D'après le théorème 5,  $N = ls$  et pour chaque paire  $\{l, s\}$  il existe une décomposition de  $N$ . Il faut donc compter les diviseurs de  $N$  inférieurs ou égaux à  $\sqrt{N}$ .

Si  $N$  est un carré,  $N = \prod_{i=1}^k p_i^{2\alpha_i}$  et  $\tau(N) = \prod_{i=1}^k (1 + 2\alpha_i)$  est impair. Donc le nombre de paires vaut  $\frac{\tau(N)-1}{2}$

Si  $N$  n'est pas un carré, le nombre de diviseurs est pair puisque à chaque diviseur  $d$  de  $N$  on associe  $\frac{N}{d}$

donc le nombre de paires vaut  $\frac{\tau(N)}{2} - 1$ .

## 2.5 Et pourquoi ne pas s'intéresser aux nombres 3-trapézoïdaux ?

**Théorème 7.** Tous les nombres impairs supérieurs à 1 sont 3-trapézoïdaux

$3=0+3$ .

si  $N > 3$  alors  $N = 2(k + 1) + 1$  avec  $k \geq 1$ . Donc  $N = 2k + 3 = k + (k + 3)$  et  $N$  est 3-trapézoïdal.

**Remarque :** les nombres 3-trapézoïdaux sont de la forme :

$$T(d, 3, n) = \frac{n(2d + 3(n - 1))}{2}$$

Donc si  $n > 2$  alors  $N$  est un nombre rectangulaire. En effet, si  $n > 2$  est pair alors :

$$N = \frac{n}{2} (2d + 3(n - 1))$$

Et si  $n > 2$  est impair alors :

$$N = n \left( d + \frac{3(n - 1)}{2} \right)$$

**Théorème 8.** Si  $n$  est impair alors  $T(d, 3, n)$  est un multiple de  $n$

Si  $n$  est pair alors  $T(d, 3, n) \equiv \frac{n}{2}[n]$

Preuve

Si  $n = 2k + 1$  est impair alors

$$T(d, 3, n) = (2k + 1)(2d + 3k) = (2d + 3k) \times n$$

Si  $n = 2k$  est pair alors

$$T(d, 3, n) = K \times 2d + 3k(2k - 1)$$

mais  $3k(2k - 1) = 6k^2 - 3k \equiv k[n]$  donc  $T(d, 3, n) \equiv k[n]$ .

**Théorème 9.** Tout entier naturel supérieur à 1 est 3-trapézoïdal à condition d'accepter les nombres négatifs pour les nombres pairs.



Soit  $N$  un nombre naturel

$N$  est impair alors c'est un nombre 3-trapézoïdal (théorème 7)

$N$  est pair alors  $N = 2^{\alpha_0}(2k + 1) = 2^{\alpha_0+1}k + 2^{\alpha_0}$

En posant  $n = 2^{\alpha_0+1}$  alors  $N \equiv 2^{\alpha_0} [2^{\alpha_0+1}]$

**Une méthode pratique** Si  $N$  est impair, la méthode est donnée par la démonstration du théorème 7.

Si  $N$  est pair, alors  $N = 2^{\alpha_0}(2k + 1)$ . On pose  $n = 2^{\alpha_0+1}$

$$N = T(d, 3, 2^{\alpha_0+1}) = \frac{2^{\alpha_0+1} (2d + 3(2^{\alpha_0+1} - 1))}{2}$$

$$2^{\alpha_0} (2k + 1) = 2^{\alpha_0+1}d + 3 \times 2^{\alpha_0} (2^{\alpha_0+1} - 1)$$

$$2k + 1 = 2d + 3(2^{\alpha_0+1} - 1)$$

$$d = k - 3 \times 2^{\alpha_0} + 2$$

Par exemple :  $N = 242 = 2 \times (2 \times 60 + 1)$

$d = 60 - 3 \times 2 + 2 = 56$  et  $n = 4$  et en effet :  $242 = 56 + 59 + 62 + 65$

Lorsque  $d$  est négatif, alors la suite arithmétique comporte des nombres négatifs. Et si  $k + 2$  est un multiple de 3, on peut se ramener à une somme de nombres positifs. Par exemple :

$N = 72 = 8 \times (2 \times 4 + 1)$

$d = 4 - 3 \times 8 + 2 = -18$  et  $n = 16$

$72 = -18 - 15 - 12 - 9 - 6 - 3 + 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 21 + 24 + 27$

## 2.6 D'une manière générale

**Lemme 1.** *Si  $r$  est impair. Soit  $N$  un entier positif  $T(d, r, k) = N$ . Si  $k$  un nombre impair alors c'est un diviseur impair de  $N$  et  $k$  est pair alors  $\frac{2n}{k}$  est un diviseur pair de  $N$ .*

En effet :

Si  $k$  est impair,  $T(d, r, k) = k \frac{2d + (k-1)r}{2}$  et  $k$  est un diviseur impair de  $N$

Si  $k$  est pair  $T(d, r, k) = \frac{k}{2} (2d + (k-1)r)$  et  $2d + (k-1)r = \frac{2N}{k}$  est un diviseur pair de  $N$

**Théorème 10.** *Si  $r$  est impair. Pour tout diviseur impair  $k$  de  $N$  il y a exactement une représentation de  $N$  en somme de  $k$  termes entiers d'une progression arithmétique de raison  $r$  et il y a exactement une représentation de  $N$  en une somme de  $\frac{2n}{k}$  termes entiers d'une progression arithmétique de raison  $r$ .*

Soit  $N$  un entier et  $r$  un nombre impair.

Soit  $k = 2e + 1$  un diviseur impair de  $N$ .  $N = k \times q$

$$N = \sum_{i=-e}^e (q + ir)$$

est bien une somme de  $k$  termes d'une suite arithmétique de raison  $r$  de premier terme :

$$q - er = \frac{n}{k} - \frac{(k-1)r}{2}$$

De la même façon :

$$\sum_{i=0}^{2q-1} \frac{n}{2q} - \frac{(2q-1)r}{2} + ir$$

En effet :  $\frac{n}{2q} - \frac{(2q-1)r}{2} = \frac{k+r}{2} - \frac{Nr}{k}$  et

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2q-1} \frac{n}{2q} - \frac{(2q-1)r}{2} + ir &= 2q \left( \frac{k+r}{2} - \frac{Nr}{k} \right) + r(2q-1) \\ &= q(k+r) - 2q^2r + 2q^2r - qr = qk = N \end{aligned}$$

D'après le lemme 1 il y a une correspondance bijective entre les diviseurs impairs de  $N$  et les représentations de  $N$  comme somme de termes d'une progression arithmétique de raison  $r$  et de longueur paire tout comme il y a une correspondance bijective entre les diviseurs impairs de  $N$  et les représentations de  $N$  comme somme de termes d'une progression arithmétique de raison  $r$  et de longueur impaire, ce qui achève la preuve.

**Exemples :**

$r = 7, N = 142$

Les diviseurs impairs de  $N$  sont 1 et 71. Les diviseurs pairs 2 et 142.

$71 = 2 \times 35 + 1$  : en simplifiant l'écriture il vient :

$$142 = \sum_{i=-35}^{35} 2 + i \times 7 = -243 + (-236) + \dots + (-5) + 2 + 9 + \dots + 240 + 247$$

Par ailleurs :

$$142 = \sum_{i=0}^3 \frac{142}{2 \times 2} - \frac{3 \times 7}{2} + 7i = 25 + 32 + 39 + 46$$

**Théorème 11.** *Si  $r$  est pair alors les nombres décomposables sont tous les entiers sauf les nombres premiers. Le nombre de décompositions est le nombre de diviseurs de  $N$  moins 1.*

Preuve Soit  $r = 2r'$ .

$$T(d, 2r', n) = n(d + (n-1)r')$$

$N$  est rectangulaire et non premier.

$$N = \frac{N}{n} - (n-1)r'$$

et par conséquent :

A chaque diviseur  $n$  de  $N$  différent de 1 il existe une décomposition de longueur  $n$  de  $N$  de différence  $2r'$  et de point de départ  $d$  tel que :

$$d = \frac{N}{n} - (n-1)r'$$

**Exemple :**

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

Soit  $r = 6$

Les diviseurs de 168 sont :

$$D_{168} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168\}$$

Si par exemple on cherche une décomposition de longueur 8 :

$$d = \frac{168}{8} - 7 \times 3 = 0 \text{ et :}$$

$$168 = 0 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 + 42$$

Une décomposition de longueur 14 :

$$d = 12 - 13 \times 3 = -27$$

$$168 = -27 + (-21) + (-15) + (-9) + (-3) + 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + 33 + 39 + 45 + 51 = 33 + 39 + 45 + 51$$

On remarque aussi que lorsque  $d \equiv 0[r]$  ou ce qui est équivalent  $\frac{N}{n} \equiv 0[n]$  alors la somme se réduit à une somme d'entiers positifs.

Une décomposition de longueur 6 :

$$d = 28 - 5 \times 3 = 13$$

$$168 = 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43$$

Ces résultats permettent de programmer les décompositions de  $N$  (ici en python) :

#la liste des diviseurs de n

```
def divis(n) :
```

```
    rep=[]
```

```
    for i in range(2,n+1) :
```

```
        if n%i == 0 :
```

```
            rep.append(i)
```

```
    return rep #la liste des diviseurs impairs de n
```

```
def divis_odd(n) :
```

```
    rep=[]
```

```
    for i in range(3,n+1,2) :
```

```
        if n%i==0 :
```

```
            rep.append(i)
```

```
    return rep
```

```

def trap(N,r) :# Nombre et raison
    rep=[]
    if r%2==0 :
        Divisor=divis(N)
        for i in range(len(Divisor)) :
            d=N/(Divisor[i])-(Divisor[i]-1)*r/2
            repaux=[]
            for j in range(Divisor[i]) :
                repaux.append(d+j*r)
            rep.append(repaux)
    else :
        Divisor=divis_odd(N)
        for i in range(len(Divisor)) :
            q=N/Divisor[i]
            d=N/(2*q)-(2*q-1)*r/2
            repaux=[]
            for j in range(2*q) :
                repaux.append(d+r*j)
            rep.append(repaux)
            repaux=[]
            d=N/Divisor[i]
            long=Divisor[i]/2
            for j in range(-long,long+1) :
                repaux.append(d+r*j)
            rep.append(repaux)
    return rep

```

```

print trap(2018,17)
[[479, 496, 513, 530], [-8566, -8549, -8532,..., 8519, 8536, 8553, 8570]] (les listes ne sont pas
écrites en entier)
print trap(2018,28)
[[995, 1023],
[-14110, -14082, ..., 14086, 14114], (idem pour ces deux dernières)
[-28237, -28209, ..., 28183, 28211, 28239]]

```

### 3 Prolongements didactiques

Les prolongements didactiques de cette situation peuvent apparaître aussi bien dans les sous problèmes que la situation provoque (voir analyse didactique) que des questions qui peuvent émerger que dans des définitions de nombres particuliers : après les nombres trapézoïdaux, il peut être intéressant d'évoquer les nombres triangulaires, carrés, cubiques,...

L'intérêt didactique consiste toujours à manipuler les nombres à travers leurs propriétés intrinsèques, c'est à dire indépendantes de l'écriture des nombres dans un système de numération. La curiosité et la créativité sont alors les moteurs de la découverte de propriétés et l'ensemble des prolongements mathématiques peuvent donner l'occasion de jolis problèmes qu'il s'agit ensuite de transformer dans des situations didactiques fécondes.