Table des matières

1 Situation mathématique

Ce matin, le professeur de français doit distribuer à ses élèves un poème de Verlaine. Son document est imprimé sur une page de format A4. Pour économiser le papier, il voudrait réduire son document à une demi-page A4. Le bouton « Zoom » de la photocopieuse qui permet une réduction du document lui demande d'entrer un nombre. Peux-tu deviner quel nombre le professeur devra inscrire sur le cadran de la photocopieuse ?

La réponse sera donnée sous forme d'un texte présentant la démarche et les arguments.

Solution experte

Le nombre à saisir est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

Avec la proportionnalité

Une page A4 mesure 29,7 cm par 21 cm et une demi-page A4 (page A5) mesure 21 cm par 14,85 cm. Comme la page A5 est une réduction de la page A4, les mesures des côtés sont proportionnelles deux à deux. Le coefficient de proportionnalité est environ $\frac{21}{29{,}7} \approx 0,707$ ou $\frac{14{,}85}{21} \approx 0,707$.

Avec les aires Deux pages A5 mises côte à côte forment une page A4, donc l'aire d'une page A5 est la moitié de l'aire d'une page A4. Si on note k le coefficient de réduction cherché, on obtient l'égalité suivante :

$$A_{A4} = \frac{1}{2}A_{A4} \Longleftrightarrow k \times 29,7 \times k \times 21 = \frac{1}{2}29,7 \times 21 \Longleftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}$$

Cette équation ademet deux solutions dont on ne retiendra que la solution positive :

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707$$

Analyse a priori des stratégies des élèves

Les mathématiques travaillées ou à travailler

- Détermination d'un coefficient d'agrandissement/réduction.
- Effet d'un agrandissement/réduction sur les aires (et les volumes par prolongement).
- Définition de la racine carrée d'un nombre positif ($\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{a}^2 = a$).
- Résolution d'équations du type $x^2 = A$.

Les opérations sur la racine carrée sont étudiées en rituel à la suite de ce problème.

2 Quelques éléments de mise en œuvre

Il s'agit aussi d'entretenir les acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes des solides étudiés dans ces classes.

Dans le cadre du socle commun, les surfaces dont les aires sont à connaître sont celles du carré, du rectangle, du triangle, du disque et les solides dont les volumes sont à connaître sont le cube, le parallélépipède rectangle, le cylindre droit et la sphère.

Un plan possible de mise en œuvre

- Présentation du problème et recherche individuelle - 5 min.
- Reformulation collective du problème - 5 min.
- Travail par groupe - 15 min
  Durant ce temps, les élèves doivent juste modéliser le problème et y répondre d'une ou plusieurs manières différentes. Il n'y a pas d'affiche à réaliser
- Mise en commun - 15 min
  L'enseignant est au tableau et récolte les différentes procédures avec les réponses proposées. Il s'en suit une discussion pour valider les différentes procédures

Bilan :
- C'est une situation de proportionnalité
- Sur l'effet d'un agrandissement/réduction sur la mesure d'une longueur d'une figure
- Sur l'effet d'un agrandissement/réduction sur la mesure de l'aire d'une figure
- Sur l'introduction de la racine carrée

Trace écrite a priori pour l'agrandissement - réduction

Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires

Propriété : Quand on agrandit ou on réduit une figure, si les longueurs sont multipliées par un coefficient k, alors l'aire est multipliée par k^2.

Exemple : Un rectangle qui a une aire de 8 cm^2 et qui subit un agrandissement de coefficient 1,5 à son aire qui est multipliée par $1,5^2 = 2,25$.

Pour annuler l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction de coefficient k sur une aire, il suffit de multiplier l'aire par $\sqrt{k}$.

Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes

Propriété : Quand on agrandit ou on réduit une figure, si les longueurs sont multipliées par un coefficient k , alors le volume est multiplié par k^3.

Exemple : Un parallélépipède rectangle a un volume V de 125 cm^3. Chacune des longueurs est multipliée par 2. Quel est le volume du parallélépipède agrandi ?

Les dimensions sont multipliées par 2 (ici $k = 2$) donc le volume est multipliée par 8 (soit $k^3 = 2^3 = 8$). Le volume du parallélépipède rectangle agrandi est donc de 1 000 cm^3 car $125 \times 8 = 1000$.

Trace écrite à propose de la racine carrée

Définition : Soit a un nombre positif. Il existe un nombre positif dont le carré est égal à a. Ce nombre est appelé « racine carrée de a » et se note $\sqrt{a}$.

Le symbole $\sqrt{}$ se nomme »radical« .

Exemples :

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et 3 est un nombre positif.

$\sqrt{-4}$ n'existe pas, car il n'y a pas de nombre réel dont le carré est égal à –4.

Propriété : Quel que soit le nombre positif a, on a :

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Exemples :

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \ \sqrt{5^2} = 5$$

Attention : la racine carrée d'un nombre n'est pas toujours un nombre entier, décimal ou fractionnaire.

A propos des équations de la forme $x^2 = a$

Propriété : Soit a un nombre donné.

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ a une seule solution : $x = 0$.
- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a exactement deux solutions :
  - L'une positive :$\sqrt{a}$.
  - L'autre négative : $-\sqrt{a}$.

Exemples :

On considère l'équation $x^2 = 12$.

Comme 12 ¿ 0, l'équation admet deux solutions : $\sqrt{12}$ et $-\sqrt{12}$. (au passage, $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$)

On considère l'équation $x^2 = -4$.

Comme -4 ¡ 0, l'équation n'admet aucune solution.